

Notions fondamentales de communications numériques

Karine Amis

Edition : Mars 2007

Rappels sur les signaux déterministes

Transformée de Fourier d'un signal x(t) tel que $\int_{IR} \lvert x(t)\rvert dt$ existe	$X(f)=\int_{IR} x(t)\exp(-j2\pi ft)dt \leftrightarrow x(t)=\int_{IR} X(f)\exp(j2\pi ft)df$ Propriétés : • $x(0)=\int_{IR} X(f)df$ • Parseval : $\int_{IR} x(t)y^*(t)dt=\int_{IR} X(f)Y^*(f)df$ • Filtrage : $y(t)=(h*x)(t)=\int_{IR} x(u)h(t-u)du \leftrightarrow Y(f)=H(f)X(f)$ • Fonction de Dirac : $x(t)=\delta(t)\leftrightarrow X(f)=1,\ \forall f$ et $x(t)=\delta(t-a)\leftrightarrow X(f)=\exp(-j2\pi af)$. • Peigne de Dirac : $x(t)=\sum_n \delta(t-na)\leftrightarrow X(f)=\frac{1}{a}\sum_p \delta\left(f-\frac{n}{a}\right)$
Théorème d'échantillonnage de Shannon Signal $x(t)$ tel que sa transformée de Fourier existe et soit de support $\left[-\frac{W}{2};\frac{W}{2}\right]$	Signal échantillonné : $x_e(t)=\sum_n x(nT_e)\delta(t-nT_e)$ Condition de reconstruction parfaite : $f_e=\frac{1}{T_e}$ $f_e \geq W$ Formule de Poisson : $x_e(t)=\left(x*\sum_n \delta_{nT_e}\right)(t)\leftrightarrow X_e(f)=X(f)\times\frac{1}{T_e}\sum_p \delta\left(f-\frac{p}{T_e}\right)=\frac{1}{T_e}\sum_p X\left(f-\frac{p}{T_e}\right)$ $\updownarrow$ $X_e(f)=\sum_n x(nT_e)\exp(-j2\pi nfT_e)$

Rappels de probabilités :

Type	**Variable aléatoire discrète à valeurs dans** $\{x_1, \cdots, x_N\}$	**Variable aléatoire absolument continue à valeurs réelles**
Caractérisation	$\Pr(X = x_k) = p_k$ $\sum_{k=1}^{N} p_k = 1$	Densité de probabilité : $f_X(x)$ $f_X(x) \geq 0$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}\,x = 1$ $\Pr(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,\mathrm{d}\,x$
Moment ***g* application mesurable**	$\mathrm{E}[g(X)] = \sum_{k=1}^{N} g(x_k)\Pr(X = x_k)$ Moyenne : E[X] Variance : $\sigma_X^2 = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2$	$\mathrm{E}[g(X)] = \int_{IR} g(x) f_X(x)\,\mathrm{d}\,x$ Moyenne : E[X] Variance : $\sigma_X^2 = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2$
Couple de variables aléatoires	$\Pr(X = x_k, Y = y_m) = p_{k,m}$ $\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} p_{k,m} = 1$	Densité de probabilité conjointe : $f_{X,Y}(x,y)$ $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ $\iint_{IR^2} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = 1$ $\Pr((X,Y) \in D) = \iint_D f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$
Lois marginales	$\Pr(X = x_k) = \sum_{m=1}^{M} \Pr(X = x_k, Y = y_m)$	$f_X(x) = \int_{IR} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}\,y$
Moment ***Z*=*g*(*X*,*Y*) v.a.**	$\mathrm{E}[g(X,Y)] = \sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} g(x_k, y_m)\Pr(X = x_k, Y = y_m)$	$\mathrm{E}[g(X,Y)] = \iint_{IR^2} g(x,y) f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$

Conditionnement	$\Pr(X = x_k \mid Y = y_m) = \dfrac{\Pr(X = x_k, Y = y_m)}{\Pr(Y = y_m)}$	$f_{X\mid Y=y}(x) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$
Indépendance de v.a. ***X* et *Y* indépendantes** **⇔ *h(X)* et *g(Y)* sont indépendantes, pour tout couple d'applications mesurables (*g*,*h*)**	$\Pr(X = x_k \mid Y = y_m) = \Pr(X = x_k)$	$f_{X\mid Y=y}(x) = f_X(x)$
Covariance $\mathrm{cov}_{X,Y} = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$ **Variables non corrélées** $\Leftrightarrow \mathrm{cov}_{X,Y} = 0$ **Indépendance ⇒ Non corrélation**		

Rappels de signal aléatoire :

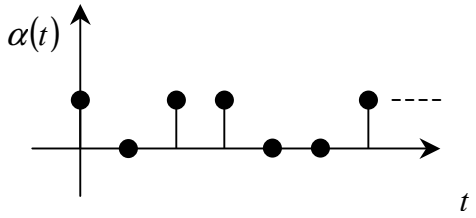
Soit un processus aléatoire *x(t)*. Notations : $z = a + jb \leftrightarrow z^* = a - jb$.

Moyenne	$m(t) = \mathrm{E}[x(t)]$
Fonction d'auto-covariance **Fonction d'auto-corrélation**	$\Gamma_x(t,\tau) = \mathrm{E}[x(t)x^*(t-\tau)] - \mathrm{E}[x(t)]\mathrm{E}[x^*(t-\tau)]$ $R_x(t,\tau) = \mathrm{E}[x(t)x^*(t-\tau)]$

Stationnarité au sens large	$\mathrm{E}[x(t)] = m, \quad \forall t \quad \text{et } \Gamma_x(t,\tau) = \Gamma_x(\tau)$
Densité spectrale de puissance d'un signal stationnaire au sens large	$S_x(f) = \int_{IR} R_x(\tau) \exp(-j2\pi f\tau)\, \mathrm{d}\,\tau$
Fonction d'intercovariance et d'intercorrélation	$\Gamma_{x_1,x_2}(t,\tau) = \mathrm{E}[x_1(t)x_2^*(t-\tau)] - \mathrm{E}[x_1(t)]\,\mathrm{E}[x_2^*(t-\tau)]$ $R_{s_1x_2}(t,\tau) = \mathrm{E}[x_1(t)x_2^*(t-\tau)]$
Transformation par filtrage (x_1 et x_2 stationnaires au sens large) : $y_1 = h_1 * x_1$ $y_2 = h_2 * x_2$	$R_{y_1,y_2}(\tau) = (h_1(t) * h_2^*(-t) * R_{x_1,x_2}(t))$ $S_{y_1,y_2}(f) = H_1(f)H_2^*(f)S_{x_1,x_2}(f)$ Cas particulier : Wiener-Khintchine $S_{y_1}(f) = \lvert H_1(f)\rvert^2 S_{x_1}(f)$
Energie moyenne d'un signal aléatoire stationnaire au sens large (si elle existe)	$E_x = \mathrm{E}\left[\int_{IR} \lvert x(t)\rvert^2\, \mathrm{d}\,t\right]$
Puissance moyenne d'un signal aléatoire centré stationnaire au sens large	$P_x = R_x(0) = \mathrm{E}\left[\lvert x(t)\rvert^2\right] = \int_{IR} S_x(f)\, \mathrm{d}\,f$

Paramètres fondamentaux de la modulation linéaire :

Soit (α_k) la suite des éléments binaires à transmettre. On suppose que l'élément binaire est émis toutes les T_b secondes. Le signal numérique délivré à l'entrée du modulateur est de la forme : $\alpha(t) = \sum_k \alpha_k \delta(t - kT_b)$.



Débit binaire : nombre d'éléments binaires émis par unité de temps

$$D_b = \frac{1}{T_b} \ [bits/s]$$

Modulation :

- Regroupement des éléments binaires par paquets de *m* éléments binaires.
- Emission d'un signal analogique toutes les $T=mT_b$, associé au paquet de *m* e.b. présent à l'entrée du modulateur

$$[\alpha_{mk} \ \alpha_{mk+1} \ \cdots \ \alpha_{mk+m-1}] \mapsto S^{(i_k)}(t - kT)$$

$$S^{(i_k)} \in \mathcal{A} = \{S^{(1)}, \cdots, S^{(M)}\}, \ \forall \ k$$

$$M = 2^m$$

Signal modulé : $s(t) = \sum_k S^{(i_k)}(t - kT)$

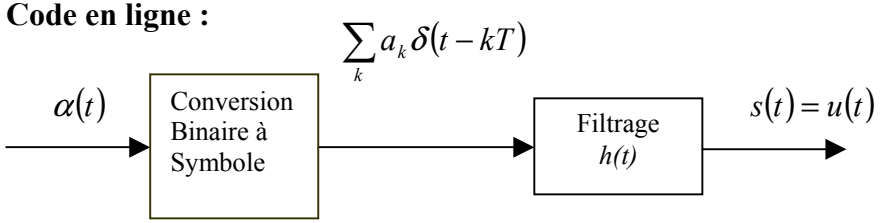
Conservation du temps : $T = mT_b$

Rapidité de modulation : nombre de symboles de modulation émis par unité de temps

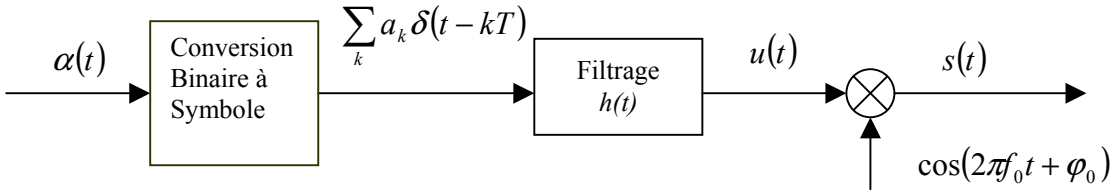
$$R = \frac{1}{T} = \frac{1}{mT_b} = \frac{D_b}{m} \quad [bauds \text{ ou } symbole/s]$$

Code en ligne :	Transmission en bande de base Spectre du signal modulé centré sur la fréquence nulle
Modulation linéaire sur fréquence porteuse :	Spectre du signal modulé centré sur la fréquence f_0, dite fréquence porteuse Codage en ligne suivi d'une transposition en fréquence

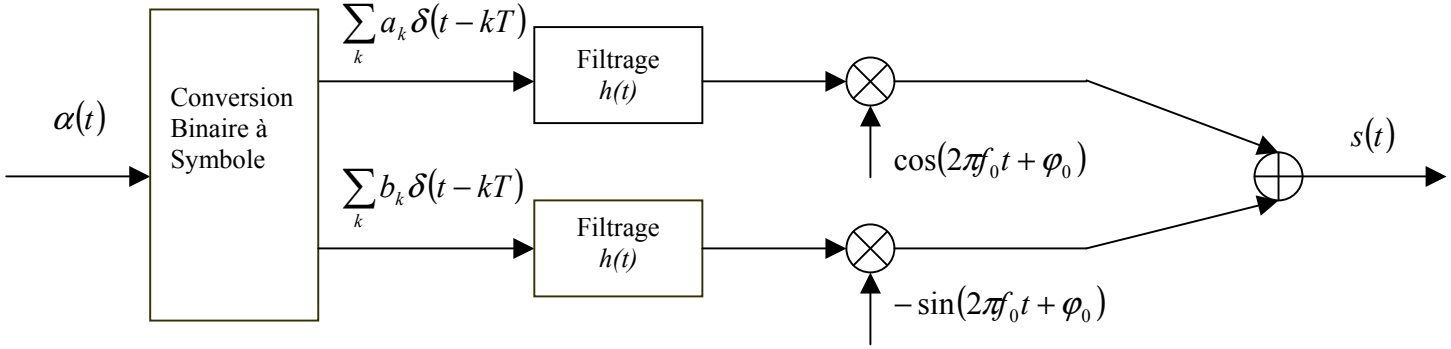
Code en ligne :



Modulation par déplacement d'amplitude (MDA):



Modulation par déplacement de phase (MDP) ou modulation par déplacement d'amplitude en quadrature (MAQ)



Conversion binaire à symbole :

- **Cas des codes en ligne et de la MDA-*M***
  Regroupement des éléments binaires par paquets de *m* éléments : $\alpha_{mk}\ \alpha_{mk+1}\ \cdots\ \alpha_{mk+m-1} \mapsto a_k \in \mathcal{A}$
  Les symboles a_k sont de durée T et appartiennent à un alphabet M-aire : $\text{card}(\mathcal{A}) = M = 2^m$.

  Le signal en sortie du convertisseur binaire à symbole est de la forme : $a(t) = \sum_k a_k \delta(t - kT)$

MDA-M : $\mathcal{A} = \{\pm A,\ \pm 3A,\ \cdots,\ \pm(M-1)A\}$

- **Cas de la MDP-*M* et de la MAQ-*M***
  Regroupement des éléments binaires par paquets de *m* éléments : $\alpha_{mk}\ \alpha_{mk+1}\ \cdots\ \alpha_{mk+m-1} \mapsto (a_k, b_k)$

MDP-M :
$$a_k = \cos\theta_k$$
$$b_k = \sin\theta_k$$
$$\theta_k \in \left\{ \phi_0 + \frac{2p+1}{M}\pi \,\middle|\, p = 0,\ 1,\ \cdots,\ M-1 \right\}$$

MAQ-M :
$$a_k \in \{\pm A,\ \pm 3A,\ \cdots,\ \pm(\sqrt{M}-1)A\}$$
$$b_k \in \{\pm A,\ \pm 3A,\ \cdots,\ \pm(\sqrt{M}-1)A\}$$

Filtre de mise en forme :

- Filtre passe-bas
- Réponse impulsionnelle : *h(t)*
- Réponse fréquentielle : *H(f)*

Densité spectrale de puissance d'un signal du type : $d(t) = \sum_k d_k \delta(t - kT)$

- Hypothèse : symboles d_k centrés, indépendants
- $S_d(f) = \frac{\sigma_d^2}{T}$

Energies moyennes – Puissance du signal modulé

E_s : énergie moyenne nécessaire pour transmettre un symbole de modulation

E_b : énergie moyenne nécessaire pour transmettre un élément binaire

P_s : puissance moyenne du signal modulé

$E_s = \log_2(M) E_b$

$P_s = \frac{E_s}{T} = \frac{E_b}{T_b}$

$P_s = R_s(0)$

- Cas des codes en lignes :
  $s(t) = \sum_k a_k h(t - kT)$ Pour transmettre le symbole a_k, on utilise le signal $s_k(t) = a_k h(t - kT)$. D'où :
  $$E_s = \mathrm{E}\left[\int_{IR} |s_k(t)|^2 \,\mathrm{d}t\right] = \sigma_a^2 \int_{IR} |h(t)|^2 \,\mathrm{d}t \underset{Parseval}{=} \sigma_a^2 \int_{IR} |H(f)|^2 \,\mathrm{d}f$$

- Cas des modulations linéaires sur fréquence porteuse (Hypothèse : $f_0 T >> 1$)
  $s(t) = \sum_k a_k h(t - kT)\cos(2\pi f_0 t + \phi_0) - b_k h(t - kT)\sin(2\pi f_0 t + \phi_0)$

  E_s est l'énergie moyenne nécessaire pour transmettre un couple (a_k, b_k) pour k quelconque.

  Pour transmettre le couple (a_k, b_k), on utilise le signal $s_k(t) = a_k h(t - kT)\cos(2\pi f_0 t + \phi_0) - b_k h(t - kT)\sin(2\pi f_0 t + \phi_0)$.

  D'où $E_s = \mathrm{E}\left[\int_{IR} |s_k(t)|^2 \,\mathrm{d}t\right]$

$$E_s = \sigma_a^2 \int_{IR} |h(t-kT)|^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \phi_0)dt + \sigma_b^2 \int_{IR} |h(t-kT)|^2 \sin^2(2\pi f_0 t + \phi_0)dt - 2E[a_k b_k] \int_{IR} |h(t-kT)|^2 \cos(2\pi f_0 t + \phi_0)\sin(2\pi f_0 t + \phi_0)dt$$

Or :

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

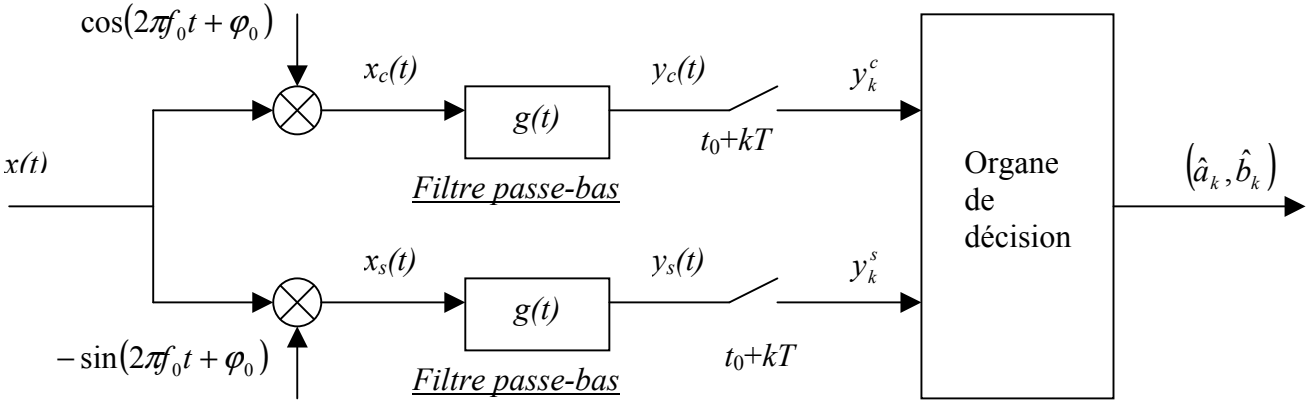
$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$2\cos(x)\sin(x) = \sin(2x)$$

h(t) est un filtre passe-bas donc $h^2(t-kT)$ aussi. Donc comme $2f_0$ est une fréquence très élevée ($f_0T>>1$), elle est coupée par le filtre de réponse impulsionnelle $h^2(t-kT)$

D'où : $E_s = \frac{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}{2} \int_{IR} |h(t)|^2 dt = \frac{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}{2} \int_{IR} |H(f)|^2 df$

Récepteur optimal pour une modulation linéaire : transmission sur canal gaussien à bande limitée



Le signal est reçu en présence d'un bruit blanc additif gaussien de DSP de puissance bilatérale constante $\frac{N_0}{2}$: $x(t) = s(t) + b(t)$.

Sorties des multiplieurs :

$$x_c(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$
$$x_s(t) = -x(t)\sin(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$

En tenant compte des formules de trigonométrie, on obtient :

$$x_c(t) = \frac{1}{2}\sum_k a_k h(t-kT) + \frac{1}{2}\sum_k a_k h(t-kT)\cos(4\pi f_0 t + 2\varphi_0) - b_k h(t-kT)\sin(4\pi f_0 t + 2\varphi_0) + b(t)\cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$
$$x_s(t) = \frac{1}{2}\sum_k b_k h(t-kT) - \frac{1}{2}\sum_k b_k h(t-kT)\cos(4\pi f_0 t + 2\varphi_0) + a_k h(t-kT)\sin(4\pi f_0 t + 2\varphi_0) - b(t)\sin(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$

Sortie des filtres passe-bas :

Le filtre de réponse impulsionnelle *g(t)* est un filtre passe-bas de bande passante *B* très inférieure à la fréquence porteuse : (f_0>>B). Dès lors, les signaux multiples de $\cos(4\pi f_0 t + 2\varphi_0)$ et de $\sin(4\pi f_0 t + 2\varphi_0)$ sont éliminés par ce filtre.

Elément de démonstration :

$$\mathrm{TF}[\cos(4\pi f_0 t + 2\varphi_0)] = \frac{1}{2}[\exp(j2\varphi_0)\delta(f - 2f_0) + \exp(-j2\varphi_0)\delta(-f - 2f_0)]$$
$$\mathrm{TF}[\sin(4\pi f_0 t + 2\varphi_0)] = \frac{1}{2j}[\exp(j2\varphi_0)\delta(f - 2f_0) - \exp(-j2\varphi_0)\delta(-f - 2f_0)]$$

Notons $r = g * h$ le filtre équivalent de la chaîne (mise en cascade du filtre d'émission, de la réponse impulsionnelle du canal équivalent en bande de base (ici un dirac) et du filtre de réception).

Les sorties des filtres passe-bas sont donc :

$$y_c(t) = \frac{1}{2}\sum_k a_k r(t-kT) + w_c(t)$$
$$y_s(t) = \frac{1}{2}\sum_k b_k r(t-kT) + w_s(t)$$

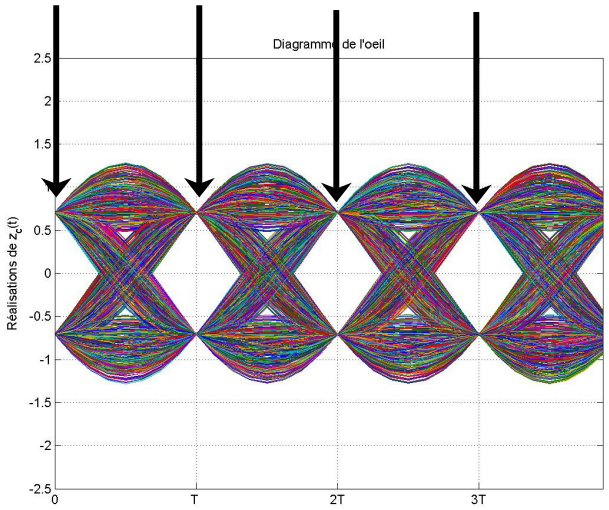
$$
\text{avec : } \begin{cases} b_c(t) = b(t)\cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) \\ w_c(t) = \int_{IR} b_c(\tau) g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ b_s(t) = -b(t)\sin(2\pi f_0 t + \varphi_0) \\ w_s(t) = \int_{IR} b_s(\tau) g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \end{cases}.
$$

Diagramme de l'œil :

S'observe en sortie du filtre passe-bas de réception.

Superposition de toutes les réalisations possibles de $y_c(t)$ (resp. $y_s(t)$).

Permet de déterminer l'instant d'échantillonnage optimal : instant d'ouverture maximale de l'œil.



Echantillonnage :

En sortie de l'échantillonneur, on obtient des échantillons séparés de T secondes. Les échantillons prélevés à l'instant $t_0 + kT$ doivent permettre de prendre une décision sur (a_k, b_k).

On obtient : $$y_k^c = \frac{1}{2} a_k r(t_0) + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{n\neq 0} a_{n-k} r(t_0 + nT)}_{\text{Terme d'intérférence entre symboles}} + w_k^c$$

$$y_k^s = \frac{1}{2} b_k r(t_0) + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{n\neq 0} b_{n-k} r(t_0 + nT)}_{\text{Terme d'intérférence entre symboles}} + w_k^s$$

Pour que la décision sur (a_k, b_k) puisse être prise uniquement à partir de (y_k^c, y_k^s), il faut que le terme d'interférence entre symboles (IES) soit nul. Pour cela le filtre de réponse impulsionnelle *r(t)* doit vérifier le premier critère de Nyquist.

Premier critère de Nyquist (interférence entre symboles nulle) :

$$r(t_0 + kT) = r(t_0)\delta_{k,0} \overset{\text{Domaine fréquentiel}}{\underset{\text{Domaine temporel}}{\Longleftrightarrow}} \frac{1}{T}\sum_k R\left(f - \frac{k}{T}\right)\exp\left(j2\pi\left(f - \frac{k}{T}\right)t_0\right) = r(t_0)$$

N.B. : le filtre de largeur de bande minimale vérifiant le premier critère de Nyquist est défini est un filtre dont la réponse fréquentielle est une porte de support $\left[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right]$. Il en résulte que :

La bande minimale nécessaire pour transmettre en bande de base sans IES des symboles de durée T est égale à $\frac{1}{2T}$.

La bande minimale nécessaire pour transmettre sur fréquence porteuse sans IES des symboles de durée T est égale à $\frac{1}{T}$.

Il est impossible de concevoir un filtre dont la réponse fréquentielle est une porte. En pratique, la bande occupée par le signal modulé est supérieure à la bande minimale de Nyquist. **L'excès de bande** est défini comme la différence entre la bande occupée par le signal modulé et la bande minimale de Nyquist.

Dans le cas où le premier critère de Nyquist est vérifié, l'interférence entre symboles est nulle et $y_k^c = \frac{1}{2} a_k r(t_0) + w_k^c$, $y_k^s = \frac{1}{2} b_k r(t_0) + w_k^s$. Pour que la prise de décision soit la plus fiable possible, il faut que le rapport signal à bruit sur les variables de décisions (y_k^c, y_k^s) soit le plus grand possible. Ceci équivaut à avoir une amplitude $r(t_0)$ positive et la plus grande possible.
Or : $r(t_0) = \int_{IR} h(\tau) g(t_0 - \tau) \mathrm{d}\tau$: produit scalaire entre $(t \mapsto h(t))$ et $(t \mapsto g(t_0 - t))$. D'après le théorème de Cauchy Schwartz, le produit scalaire entre deux vecteurs réels est maximal si les vecteurs sont colinéaires et de même signe. Son application directe nous fournit l'expression optimale du filtre *g(t)* en fonction de *h(t)* :

Second critère de Nyquist (rapport signal à bruit maximal):

$$g(t) = \lambda h(t_0 - t), \quad \lambda > 0$$ Filtre adapté au filtre d'émission.

N.B. Dans le cas où le canal équivalent en bande de base est de réponse impulsionnelle *c(t)* :

$$r = g * c * h$$

Premier critère de Nyquist : $r(t_0 + kT) = r(t_0)\delta_{k,0} \xrightarrow[\text{Domaine temporel}]{\text{Domaine fréquentiel}} \frac{1}{T}\sum_k R\left(f - \frac{k}{T}\right)\exp\left(j2\pi\left(f - \frac{k}{T}\right)t_0\right) = r(t_0)$

$r(t_0)$ réel

Second critère de Nyquist : $g(t) = \lambda (c * h)^*(t_0 - t), \quad \lambda > 0$ Filtre adapté à la mise en cascade du filtre d'émission et de la réponse impulsionnelle du canal équivalent en bande de base